



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exercice Généralisation du th. de Poynting pour un milieu avec $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\epsilon, \mu \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} \epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' \\ \mu = \mu' - j\mu'' \end{cases} \quad \epsilon'', \mu'', \epsilon', \mu' \in \mathbb{R}$$

Interpréter.

Solution: Reprenant la démonstration, on aurait pour seul changement $(\epsilon_0, \mu_0) \rightarrow (\epsilon, \mu)$ et donc:

$$j\frac{\omega}{2} \int_V dV (\mu_0 |\vec{H}|^2 - \epsilon_0 |\vec{E}|^2) \rightarrow j\frac{\omega}{2} \int_V (\mu |\vec{H}|^2 - \epsilon^* |\vec{E}|^2) dV$$

Le nouveau terme d'énergie s'écrit:

$$\frac{\omega}{2} \int_V dV (\mu'' |\vec{H}|^2 + \epsilon'' |\vec{E}|^2) + j \times \text{partie imaginaire}$$

$\Rightarrow$ on obtient dans la version réelle un terme en plus:

$$\frac{\omega}{2} \int_V dV (\mu'' |\vec{H}|^2 + \epsilon'' |\vec{E}|^2) = \text{énergie perdue (absorbée par le milieu) dans } V \text{ en un cycle.}$$

$\Rightarrow$ doit être positif $\Rightarrow \underline{\mu'' > 0 \text{ et } \epsilon'' > 0}$ représentent des pertes par absorption dans le milieu ($\epsilon' - j\epsilon'', \mu' - j\mu''$)



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

(iii) Dualité

C23 - Dualité électro-magnétique

Symétrisons les équations de Maxwell :

$$\begin{aligned}
 (1) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho_e & (2) \vec{\nabla} \cdot \mu \vec{H} &= \overset{\rho_m}{0} & (3) \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} - \overset{\text{densité de}}{\vec{M}} & (4) \vec{\nabla} \times \vec{H} &= j\omega\epsilon\vec{E} + \vec{J} \\
 & & & \text{charges magnétiques} & & & \text{densité de} \\
 & & & & & & \text{courants magnétiques}
 \end{aligned}$$

dualité : Si $(\vec{E}, \vec{H})$ satisfont les eq. de Maxwell pour $(\epsilon, \mu, \rho_e, \rho_m, \vec{J}, \vec{M})$ alors $(\vec{E}' = -\vec{H}, \vec{H}' = \vec{E})$ les satisfont pour $(\epsilon' = \mu, \mu' = \epsilon, \rho_e' = -\rho_m, \rho_m' = \rho_e, \vec{J}' = -\vec{M}, \vec{M}' = \vec{J})$

Démon

$$\begin{aligned}
 (1) &\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \mu' \vec{H}' = \rho_m' & (2) &\rightarrow +\vec{\nabla} \cdot \epsilon' \vec{E}' = +\rho_e' \\
 (3) &\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H}' = -j\omega\epsilon'(-\vec{E}') + \vec{J}' \\
 (4) &\rightarrow +\vec{\nabla} \times \vec{E}' = +\vec{M}' + j\omega\mu' \vec{H}' \quad \text{QED}
 \end{aligned}$$

Conséquence : Si on connaît une solut des eq de Maxwell pour des sources données, on peut générer une solution "duale" en valable en présence des sources "duales".

$\left\{ \begin{array}{l} \text{électrique} \rightarrow \text{magnétique} \\ \text{magnétique} \rightarrow -\text{électrique} \\ \epsilon \leftrightarrow \mu \end{array} \right.$

C24 - Reprenons l'exemple de l'onde plane du C10

$$\vec{E} = E_0 \hat{y} e^{-j\beta z} \text{ dans le milieu } (\epsilon_0, \mu_0)$$

Champ $\vec{H}$ associé ? $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{j}{\omega\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{E}$

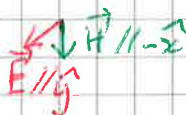
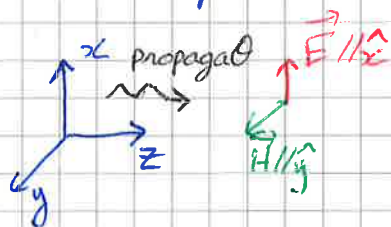
$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{jE_0}{\omega\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(-j\beta z) \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{E_0\beta}{\omega\mu_0} \exp(-j\beta z) \hat{x}$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

La dualité implique que

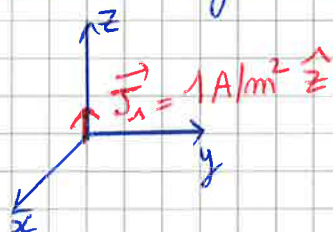
$\vec{H}' = E_0 \hat{y} e^{-j\beta z}$ $\vec{E}' = \frac{E_0 \beta}{\omega \epsilon_0} e^{-j\beta z} \hat{x}$ est aussi une solution possible dans le même milieu



"polarisations duales"

C25 - Autres exemple

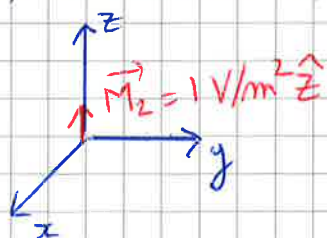
Supposons avoir réussi à calculer les champs rayonnés par un courant infinitésimal $\vec{J}_1$ dans le vide à ω_0 :



et on a trouvé (cf. chap 4):

$$\begin{cases} \vec{H}_1 = \hat{\phi} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{j\beta_0}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-j\beta_0 r} \sin\theta \\ \beta_0 = \omega_0 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \end{cases}$$

Alors, la dualité nous dit qu'un courant magnétique $\vec{M}_2$:



rayonnerait un champ:

$$\begin{cases} -\vec{E}_2 = \hat{\phi} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{j\beta_0}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-j\beta_0 r} \sin\theta \\ \beta_0 = \omega_0 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \end{cases}$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

(iii) Unicité

(2.6 - Unicité)

On fixe $(\omega, \vec{J}, \vec{M}, \epsilon, \mu)$, $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$, $\mu = \mu' - j\mu''$, $\epsilon'', \mu'' \geq 0$
et on suppose que deux solutions existent $(\vec{E}^a, \vec{H}^a)$ et $(\vec{E}^b, \vec{H}^b)$

On cherche à voir si $\delta\vec{E} = \vec{E}^a - \vec{E}^b \stackrel{?}{=} \vec{0}$, $\delta\vec{H} = \vec{H}^a - \vec{H}^b \stackrel{?}{=} \vec{0}$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E}^a = -j\omega\mu\vec{H}^a - \vec{M} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}^a = j\omega\epsilon\vec{E}^a + \vec{J} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E}^b = -j\omega\mu\vec{H}^b - \vec{M} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}^b = j\omega\epsilon\vec{E}^b + \vec{J} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\vec{\nabla} \times \delta\vec{E} = -j\omega\mu\delta\vec{H}) \cdot \delta\vec{H}^* \left[\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \right] \\ - (\vec{\nabla} \times \delta\vec{H} = j\omega\epsilon\delta\vec{E})^* \cdot \delta\vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{E} \times \delta\vec{H}^*) = j\omega(\epsilon^* |\delta\vec{E}|^2 - \mu |\delta\vec{H}|^2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\oint_S (\delta\vec{E} \times \delta\vec{H}^*) \cdot d\vec{S}}_G = \underbrace{\int_V j\omega(\epsilon^* |\delta\vec{E}|^2 - \mu |\delta\vec{H}|^2) dV}_D$$

* Si $G=0$ alors $D=0 \Rightarrow \text{Re}(D)=0 = \int_V dV \omega (\underbrace{\epsilon''}_{>0} |\delta\vec{E}|^2 + \underbrace{\mu''}_{>0} |\delta\vec{H}|^2)$
(un peu de pertes)

$$\Rightarrow \delta\vec{E} = \delta\vec{H} = 0 \quad \text{QED} \quad \text{champs uniques}$$

* Conditions pour $G=0$.

$$G = \oint_S (\delta\vec{E} \times \delta\vec{H}^*) \cdot \hat{n} dS = \oint_S (\hat{n} \times \delta\vec{E}) \cdot \delta\vec{H} dS = \oint_S (\delta\vec{H}^* \times \hat{n}) \cdot \delta\vec{E} dS$$

① Si $\hat{n} \times \vec{E}$ est spécifié sur S (E_{tan})

$$\hat{n} \times \vec{E}|_S = \hat{n} \times \vec{E}^a|_S = \hat{n} \times \vec{E}^b|_S \Rightarrow \hat{n} \times \delta\vec{E}|_S = 0$$

② Si $\hat{n} \times \vec{H}$ est spécifié sur S (H_{tan})

③ Si $\hat{n} \times \vec{E}$ est spécifié sur une partie de S et $\hat{n} \times \vec{H}$ sur le reste

* Rq: La démo ne marche pas si

1) $\omega = 0$ (mais l'unicité est vraie via Laplace eq)

2) $\epsilon'' = \mu'' = 0$, pas de pertes (vrai seulement dans le vide parfait ou exemples théoriques)



$$\vec{E}^b = \vec{E}^a + \vec{E}^h$$

→ solution de l'eq homogène

= mode propre

= existe si pas de pertes

□ : indique une démonstration compliquée pouvant être omise en cours □

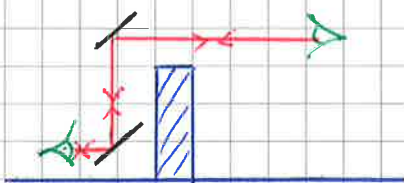


ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

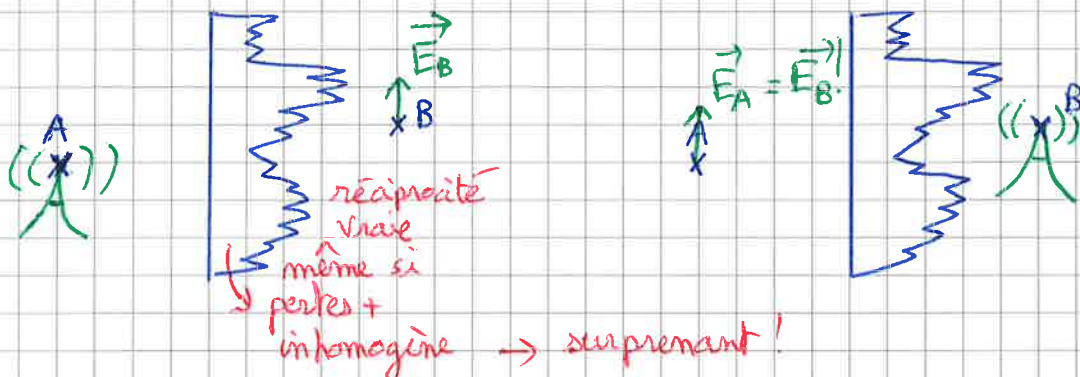
on se sert encore de
 $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} (\vec{A} \times \vec{B})$
dans C28

(iv) Réciprocité

C27

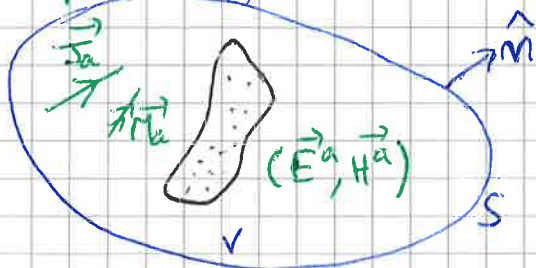


réciprocité = "je vois l'œil qui me voit"

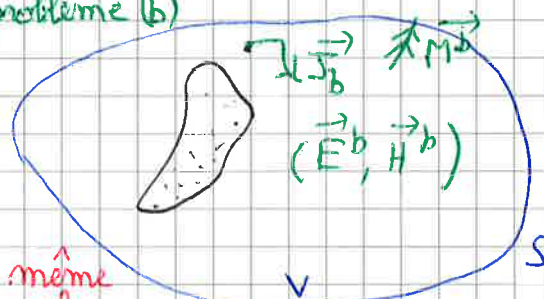


C28 - Démonstration (Rumsey, 1954)

problème (a)



problème (b)



même milieu mais sources différentes

$$\begin{aligned} \vec{H}^b \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}^a) &= -j\omega\mu \vec{H}^a \cdot \vec{M}^a \\ - \vec{E}^b \cdot (\nabla \times \vec{H}^a) &= j\omega\varepsilon \vec{E}^a \cdot \vec{E}^a + \vec{J}^a \cdot \vec{E}^a \end{aligned}$$

= (1)

$$\begin{aligned} \vec{H}^a \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}^b) &= -j\omega\mu \vec{H}^b \cdot \vec{M}^b \\ - \vec{E}^a \cdot (\nabla \times \vec{H}^b) &= j\omega\varepsilon \vec{E}^b \cdot \vec{E}^b + \vec{J}^b \cdot \vec{E}^b \end{aligned}$$

= (2)

$$\int_V ((1) - (2)) dV \Rightarrow$$

$$\oint_S (\vec{E}^a \times \vec{H}^b - \vec{E}^b \times \vec{H}^a) \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{H}^a \cdot \vec{M}^b - \vec{H}^b \cdot \vec{M}^a + \vec{E}^b \cdot \vec{J}^a - \vec{E}^a \cdot \vec{J}^b) dV$$

G



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

[Détail des calculs, peut-être omis en cours :

$$(1) \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}^a \times \vec{H}^b) = -j\omega\mu \vec{H}^a \cdot \vec{H}^b - \vec{H}^b \cdot \vec{M}^a - j\omega\varepsilon \vec{E}^a \cdot \vec{E}^b - \vec{E}^a \cdot \vec{J}^b$$

$$(2) \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}^b \times \vec{H}^a) = -j\omega\mu \vec{H}^a \cdot \vec{H}^b - \vec{H}^a \cdot \vec{M}^b - j\omega\varepsilon \vec{E}^a \cdot \vec{E}^b - \vec{E}^b \cdot \vec{J}^a$$

$$\int_V dV (\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}^a \times \vec{H}^b - \vec{E}^b \times \vec{H}^a) = \vec{H}^a \cdot \vec{M}^b - \vec{H}^b \cdot \vec{M}^a - \vec{E}^b \cdot \vec{J}^a - \vec{E}^a \cdot \vec{J}^b)$$

On prend S sphérique, $S \rightarrow +\infty$ (loin des hétérogénéités et sources) et se place dans le champ lointain. On verra (ch. 4) que dans le champ lointain

$$\begin{cases} \vec{E}^a = \eta (\vec{H}^a \times \hat{r}) \\ \vec{E}^b = \eta (\vec{H}^b \times \hat{r}) \end{cases} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

$$\Rightarrow G = \oint_S [\eta (\vec{H}^a \times \hat{r}) \times \vec{H}^b - \eta (\vec{H}^b \times \hat{r}) \times \vec{H}^a] \cdot \hat{r} \, dS$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\Rightarrow G = \eta \oint_S [(\vec{H}^a \cdot \vec{H}^b) \hat{r} - (\hat{r} \cdot \vec{H}^b) \vec{H}^a - (\vec{H}^b \cdot \vec{H}^a) \hat{r} + (\hat{r} \cdot \vec{H}^a) \vec{H}^b] \cdot \hat{r} \, dS =$$

$$\Rightarrow \int_V (\vec{E}^a \cdot \vec{J}^b - \vec{H}^a \cdot \vec{M}^b) dV = \int_V (\vec{E}^b \cdot \vec{J}^a - \vec{H}^b \cdot \vec{M}^a) dV \quad \text{réciprocité de Lorentz}$$

on fait $V \rightarrow +\infty$ mais l'intégrale est en fait limitée à la position des sources

ex 1

$$\vec{J}_a = \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \hat{z}$$

$$\vec{E}^a, \vec{H}^a$$

$$\vec{E}^b, \vec{H}^b$$

$$\vec{J}_b = \delta(\vec{r} - \vec{r}_b) \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{E}^a \cdot \hat{z} = \vec{E}^b \cdot \hat{z}$$